D'où : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0=f(0)$ d'où f est continue en $x_0=0$.

3°/a) • $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xe^{\frac{-1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{-1}{x}}=0$

• $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{\ln(1+X)}{-X}=-1$

(Soit $X=-x$, lorsque x tend vers 0, X tend vers 0^+)

d'où f n'est pas dérivable en 0 et en plus $f'_d(0)=0$ et $f'_g(0)=-1$

b) C_f admet au point O(0,0) deux demi-tangentes :

$T_1:\begin{cases}y=f'_g(0)\cdot(x-0)+f(0)\\x\le0\end{cases}\Rightarrow T_1:\begin{cases}y=-x\\x\le0\end{cases}$

$T_2:\begin{cases}y=f'_d(0)\cdot(x-0)+f(0)\\x\ge0\end{cases}\Rightarrow T_2:\begin{cases}y=0\\x\ge0\end{cases}$

4°/a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-1}{x}}=e^0=1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{\frac{-1}{x}}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{-1}{x}}-1)$ on pose $X=\dfrac{-1}{x}$

$=\lim\limits_{X\to0^-}\dfrac{-(e^X-1)}{X}=-1$

d'où D : $y=x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{(1-x)}\cdot\dfrac{(1-x)}{x}=0$

(car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$)

d'où C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(x'Ox)$.

5°/a) • $\forall x>0$, $f'(x)=e^{\frac{-1}{x}}+x\cdot(\dfrac{1}{x^2})\,e^{\frac{-1}{x}}=(1+\dfrac{1}{x})e^{\frac{-1}{x}}>0$